Enquadramento curricular

O objectivo central do tema Funções e Gráficos a leccionar no 10º ano consiste no desenvolvimento de capacidades conducentes ao estudo analítico e gráfico de funções a desenvolver nos três anos do ensino secundário. Pretende-se que esta introdução seja feita através do estudo intuitivo das propriedades de certas funções e dos seus gráficos. Neste âmbito, o estudo dos extremos relativos e absolutos é particularmente importante. Os alunos deverão entender a noção de extremo de uma função, embora a sua determinação rigorosa só possa ser feita, na maioria dos casos, mais tarde, com recurso à função derivada a ser estudada no 11º ano. No entanto, é fundamental que os conceitos tenham uma formulação rigorosa, mesmo quando abordados em contextos intuitivos.

A aplicação Perímetro do rectângulo proporciona o estudo dos máximos absolutos de funções associadas a um problema geométrico: a determinação das dimensões do rectângulo de perímetro máximo que tem dois vértices no eixo das abcissas e os outros dois vértices sobre o gráfico de uma função quadrática da família $f(x)= - ax^2 + b$, com a e b números reais positivos e a diferente de zero.

A aplicação Área do quadrado inscrito proporciona o estudo dos mínimos absolutos de funções associadas a um problema geométrico: a determinação da medida do lado do quadrado de área mínima que tem os vértices sobre os lados de um quadrado cujo lado mede 10 unidades.

Fundamentação teórica

Seja f uma função definida num conjunto D de números reais e a um elemento de A.

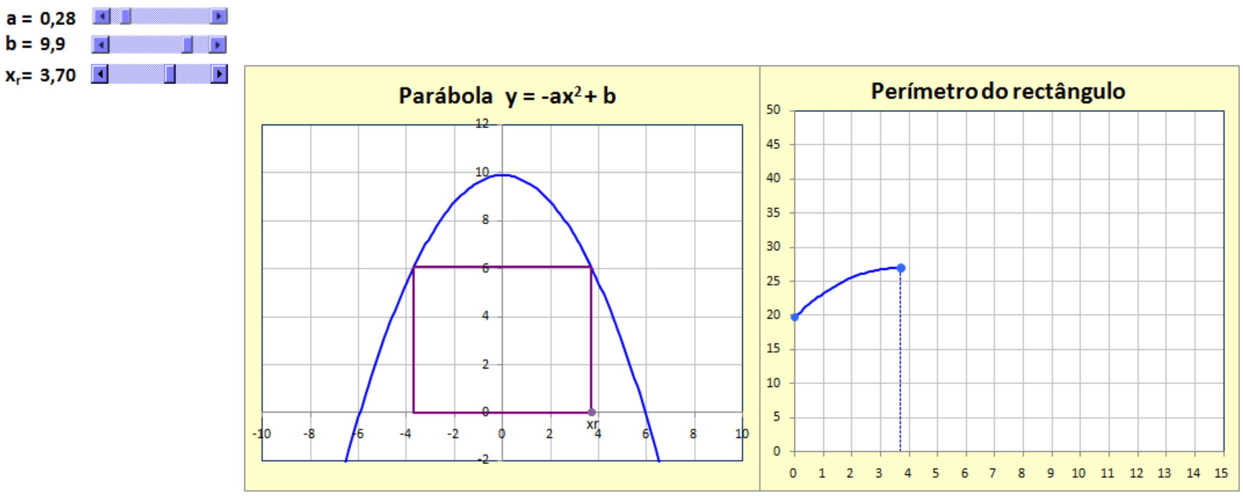
- $f(a)$ é **máximo absoluto** de uma função f se $f(a)$ é maior ou igual que qualquer outro valor da função, isto é, $f(a) \geq f(x)$ para todo o $x \in D$.
- $f(b)$ é **mínimo absoluto** de uma função f se $f(b)$ é menor ou igual a qualquer outro valor da função, isto é, $f(b) \leq f(x)$ para todo o $x \in D$.
- $f(a)$ é **máximo relativo** de uma função f se $f(a)$ é maior ou igual a qualquer outro valor da função num intervalo aberto centrado em a.
- $f(b)$ é **mínimo relativo** de uma função f se $f(b)$ é menor ou igual a qualquer outro valor da função num intervalo aberto centrado em b.

É de salientar que a existência de extremos relativos de uma função não arrasta a existência de extremos absolutos. Mas se existir um máximo (mínimo) absoluto ele é necessariamente o maior (menor) dos máximos (mínimos) relativos.

Proposta de trabalho

I

1. Abre a aplicação Perímetro do Rectangulo onde podes observar um rectângulo com dois vértices no eixo das abcissas e os outros dois vértices sobre o gráfico da função quadrática f de concavidade voltada para baixo. Observa também a função P que associa a cada x_r não negativo, o perímetro $P(x_r)$ do rectângulo correspondente.



1.1 Fixa dois valores para os parâmetros a e b e faz variar x_r. Observa o comportamento da função.

a) A função P tem zeros? Justifica.

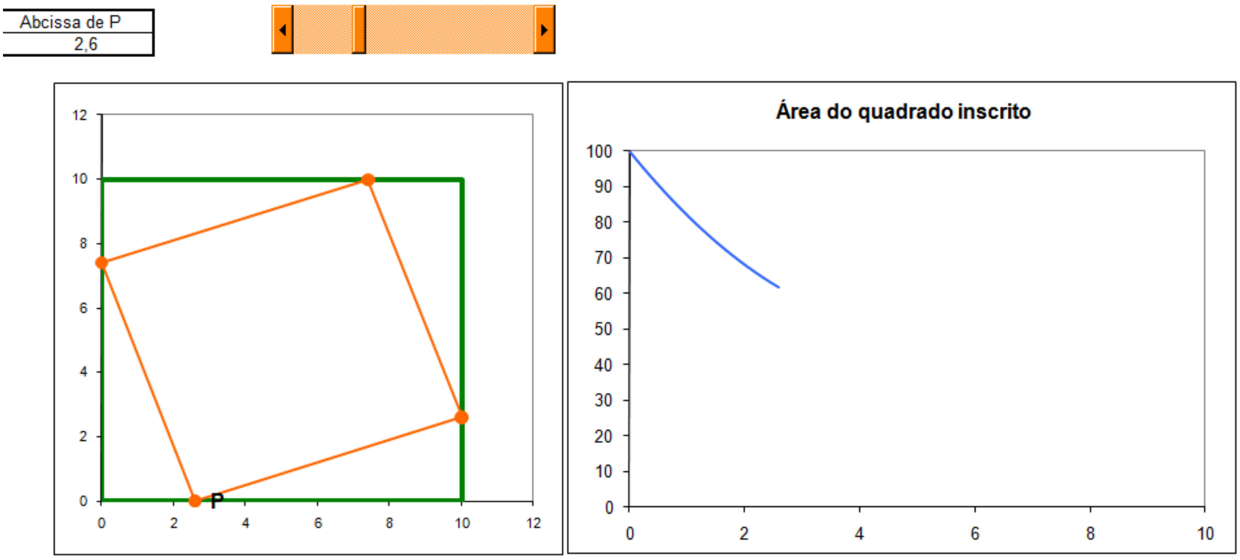
b) Qual o valor de x_r para o qual o perímetro $P(x_r)$ é máximo? Confirma analiticamente o valor obtido.

1.2 Fazendo variar a e b, considera diferentes parábolas e, em cada caso, observa o comportamento da função P.

a) Seja x_z um zero positivo da função f.
Em que situações é que $P(0) = P(x_z)$?
E em que situações é que $P(0)<P(x_z)$?

b) De que valor se aproxima $P(x_r)$ quando x_r se aproxima de zero?
E quando x_r se aproxima de x_z ?

2. Abre a aplicação Área do quadrado inscrito onde podes observar um quadrado cujos vértices estão sobre cada um dos lados de um outro quadrado com 10 unidades de lado. Observa também a função *A* que faz corresponder a cada valor de abcissa do ponto P a área do quadrado inscrito no quadrado inicial.



2.1 A função *A(x)* tem zeros? Justifica.

2.2 Qual o valor da abcissa de P para o qual a área do quadrado inscrito é mínima? Confirma este valor analiticamente.

2.3 Determina a medida do lado do quadrado inscrito com área mínima.

2.4 Poderá existir um quadrado inscrito com área igual a 40 unidades de área?